2 母関数

1. **母関数**

   数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数とは,

   $$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

   で定義される形式的ベキ級数.

   ベキ級数同士には和差 $\pm$ および積 $\times$ の演算が形式的に定義でき，形式的ベキ級数の集合は 1 を単位元とする環になる.

   他の代数・解析計算をするときは少々注意が必要.

2. **重複組合せ**

   自然数 N を一つ指定して，a_n を 1 から N までの自然数から重複を許して n 個取り出す取り出し方の個数とする.

   $$\begin{aligned} a_n &= \binom{N+n-1}{N-1} \\ &= R[x_1, x_2, \cdots, x_N] \text{ の次数 } n \text{ の階数} \\ &= x_1, x_2, \cdots, x_N \text{ でできる次数 } n \text{ の単項式の個数} \end{aligned}$$

   最初の等式はつぎのようにして分かる．取り出し方を一つ指定したとき，さらに 1 から N までの自然数をそれぞれ一つづつ加えると，1 から N までのすべての自然数を含む $N+n$ 個の数字の組が得られる．この組のメンバーを小さい順に並べると，値が 1 ジャンプする場所が $N-1$ 箇所ある．さらに，ジャンプする可能性がある場所は，数に挟まれた隙間で $N+n-1$ 個ある．したがって，$N+n-1$ 個の対象から $N-1$ 個の対象を選ぶだけの自由度がある．一方，逆に $N+n-1$ 個の隙間から $N-1$ 個を選び，N 個に区分けした固まりに 1 から N までの数字を順に入れ，それぞれの固まりから一つメンバーを除けば，N までの自然数から重複を許して n 個取り出す重複組合せが一意的に決まる.

3. **重複組合せの関数表示**

   $\{a_n\}$ の母関数はつぎのようにも表せる.

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n-1}{N-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^N}$$

左辺は定義による．右辺は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1-x_1}\frac{1}{1-x_2}\cdots\frac{1}{1-x_n}\\
&\quad=(1+x_1+x_1^2+\cdots)(1+x_2+x_2^2+\cdots)\cdots(1+x_n+x_n^2+\cdots)\\
&\quad=1+\sum_{1\le i\le n}x_i+\sum_{1\le i\le j\le n}x_ix_j+\sum_{1\le i\le j\le k\le n}x_ix_jx_k+\cdots
\end{aligned}$$

の級数の n 次の項にはすべての n 次の単項式が各々1 回現れるので，$x_1=x_2=\cdots=x_n=x$ とおけば，各係数は重複組合せの個数になる．

右辺を計算するとき，$1/(1-x)=1+x+x^2+\cdots$ という $|x|<1$ という範囲で成り立つ解析的な等式を使っているので，等号は，$|x|<1$ で x で定義された関数として成り立つ．

4. **数列の無限積の定義**

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して，第 k 項までの和 $\sum_{n=1}^k a_n$ によりえられる数列 $\{\sum_{n=1}^k a_n\}_{k\geq 0}$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n\geq 0}$ からえられる級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ は収束すると言った．ここでは和を積に置き換える．

第 k 項までの積 $\prod_{n=1}^k a_n$ によりえられる数列 $\{\prod_{n=1}^k a_n\}_{n\geq 0}$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n\geq 0}$ の無限積 $\prod_{n=1}^\infty a_n$ は収束するという．

数列 $\{a_n\}$ のメンバーに 0 が一つでもあると，その無限積は他の値によらず 0 になるので，すべての n について $a_n\neq 0$ を課す事が妥当である．

さらに $n\to\infty$ のとき $a_n\to 1$ の場合が最も興味深い．

5. **数列の無限積の収束**

級数 $\sum_n^\infty u_n$ が絶対収束する，すなわち $\sum_n^\infty |u_n|=\sigma(<\infty)$ をみたすとする．このとき無限積 $\prod_{n=1}^\infty(1+|u_n|)$ および $\prod_{n=1}^\infty(1+u_n)$ は収束する．

6. **証明**

$p_k=\prod_{n=1}^k(1+u_n)$ とおくと，

$$|p_k|\leq\prod_{n=1}^k(1+|u_n|)\leq\prod_{n=1}^k e^{|u_n|}=e^{\sum_{n=1}^k|u_n|}\leq e^\sigma$$

とくに第 2 項の右辺による評価より，この段階で $\prod_{n=1}^\infty(1+|u_n|)$ は収束することが分かる．

さらに $v_n=p_n-p_{n-1}$ とおくと，$v_n=u_np_{n-1}$ であり，

$$|v_n|=|u_np_{n-1}|\leq e^\sigma|u_n|$$

一方，仮定より $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ は絶対収束するので $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ も絶対収束する．したがって級数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ は収束するが，$\sum_{n=1}^{k} v_n = p_k$ であり，その収束先 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \lim_{k\to\infty} p_k$ は $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ の収束先に他ならない．

7. **関数列の無限積**
   $\{u_n(x)\}_{n\geq 0}$ を閉区間 K 上の連続関数列で，$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ が K 上で一様収束するとする．（このとき収束先の関数 $u_\infty(x)$ は連続で，$\sup_{x\in K} u_\infty(x) = \sigma < \infty$）．このとき $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(x))$ は K 上一様収束する．とくに連続.

8. **証明**
   数列の場合と同様に二つの評価

$$|p_k(x)| \leq e^{\sigma}, \qquad |v_n(x)| \leq e^{\sigma}|u_n(x)|$$

がえられる．一方 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ は一様収束するので，任意の ε に対し自然数 N が存在して，

$$\sum_{n=N}^{\infty} |u_n(x)| \leq \varepsilon$$

が任意の $x \in K$ に対して成り立つ．これより

$$\sum_{n=N}^{\infty} |v_n(x)| \leq e^{\sigma}\varepsilon$$

これは $(\prod_{n=0}^{k}(1+u_n(x))) = p_k(x) = \sum_{n=1}^{k} v_n(x)$ が一様収束することを示す.

9. **例 (分割数)**
   自然数 n を,（単数を含む）複数の自然数の和として表す表し方の個数を n の分割数といい，$p(n)$ で表す．ただし $p(0) = 1$ と約束する．

10. **分割数の母関数**
    分割数の母関数は,

$$\sum_{n} p(n)x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$$

と表示される．右辺の無限積は $|x| < 1$ に含まれる勝手なコンパクト集合上一様収束する．

右辺をえるために n を自然数とし,

$$\frac{1}{1-x_n^n} = 1 + x_n^n + x_n^{2n} + \cdots$$

を $n \geq 1$ に関して無限積をとると

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x_n^n} &= (1+x_1+x_1^2+\cdots)(1+x_2^2+x_2^4+\cdots)\cdots \\ &= 1+x_1+x_1^2+x_2^2+x_1^3+x_1x_2^2+x_3^3+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k \\ i_1+i_2+\cdots+i_k=n}} x_{i_1}^{i_1}x_{i_2}^{i_2}\cdots x_{i_k}^{i_k}\right)\end{aligned}$$

ここで最後のかっこ内の和は，n を固定したときの n の分割に関する和で，k は分割の長さを表し，固定された数字ではない．

これにより，右辺の n 次の項はちょうど $p(n)$ 個の単項式からなるので，$x = x_1 = x_2 = \cdots$ とおけばよい．

11. **例 (線形漸化式)**
$a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ があたえられ，さらに任意の $n \geq k$ に対して数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が，定数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ を用いて漸化式

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_k a_{n-k}$$

で表せるとき，$\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数は有理関数になる．

12. **説明**
$\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数を $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおくと，

$$(1-\alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots - \alpha_k x^k)g(x) = P(x)$$

は，k 次以上の項の係数はすべて漸化式により相殺されるので，高々 $k-1$ 次の多項式になる．したがって g は有理関数．

13. **コメント**
有理式は分母が因数分解できれば部分分数展開でき，a_n の一般項を n の式で表すのは

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!\,n!} x^n$$

に帰着される．

14. **例 (カタラン数)**
n 個の文字の積 $x_1x_2\cdots x_n$ を $n-1$ 個の 2 項演算の合成に分解する仕方の個数は

$$\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{(2n-1)}\binom{2n-1}{n}$$

15. **証明**

$a_1 = 1$ と約束すれば,

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$

がなりたつ．$\{a_n\}_{n \geq 0}$ の母関数を $g(x)$ とおけば

$$g^2(x) = g(x) - 1$$

をみたす．そこでこれを $g(x)$ に関する 2 次関数と見なして解くと

$$g(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

$g(0) = 0$ なので，正しい解は $-$ の方．この右辺を級数展開することにより結果がえられる．

16. **多項式から指数関数への転換**

$a_n \to a_n x^n$ は $1, x, x^2, \cdots$ が一次独立.

$1^x, 2^x, 3^x, \cdots$ も一次独立なので $a_n \to a_n/n^x$ という対応を考える

17. **ディリクレ母関数**

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ のディリクレ母関数とは

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

で表される形式的ディリクレ級数．形式的ディリクレ級数全体には和と積が自然に定義され，全体の集合は環になる.

18. **補題**

形式的ディリクレ級数環は

(1) 結合法則をみたす可換環.

(2) 1 が積の単位元.

(3) $a_1 \neq 0$ ならば $A(s)$ は逆元をもつ.

19. **例 (リーマンの ζ 関数)**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

は $s > 1$ で収束する.

注意： 一般に a_n が n の多項式のとき，$A(s)$ は $s >> 0$ で収束.

20. **収束**

$s > 1$ のとき $1/x^s$ は減少関数で，$n \geq 2$ では

$$\frac{1}{n^s} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^s}$$

がなりたつ．したがって

$$\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$$

21. **オイラーの無限積表示**

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

22. **説明**

まず右辺の無限積が収束することは，前の補題で分かる．

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots$$

これを素数について積をとると．素数を小さい順にならべて $2 = p_1 < p_2 < \cdots$ とすると

$$\begin{aligned}\prod_{p \in \text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}} &= \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{p_2^s} + \frac{1}{p_2^{2s}} + \cdots\right)\cdots \\ &= \sum_{0 \leq e_1, e_2, \cdots} \frac{1}{(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots)^s}\end{aligned}$$

ここで最後の和は，指数の列 $e_1, e_2, \cdots$ として 0 でないものが有限個である列にわたってとるので，すべての自然数がただ 1 回だけ現れ，リーマンの ζ 関数に一致する．

23. **リーマン ζ の逆関数**

リーマン ζ は定数項がゼロではないので，ディリクレ級数環の中の可逆であり，逆元 ζ^{-1} は

$$\zeta^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

と展開される．ここで μ はメビウス関数．

24. **証明**

$$B(s) = \prod_{p \in \text{素数}} (1 - p^{-s})$$

とおくと，$B(s)$ は $s > 1$ で絶対収束し，オイラーの無限積表示よりリーマン ζ の逆元である．この無限積の m 番目までの積をとると，分母が p_m までの自然数の s 乗が現れる項はすべて尽くすので，

$$\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \sum_{n=1}^{p_m} \frac{\mu(n)}{n^s} + \sum_{n > p_m} \frac{\pm 1 \text{ または } 0}{n^s}$$

$m \to \infty$ のとき，後半は 0 に収束し，前半は求める ζ^{-1} に収束する．

25. **メビウスの反転公式復活**

f, g を $\mathbb{N}$ 上の関数とすると，

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \Longleftrightarrow \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(n/d)$$

26. **証明**

$A(s)$, $B(s)$ をそれぞれ $f(n)$, $g(n)$ のディィリクレ母関数とする．このとき $A(s) = B(s)\zeta(s)$ が左の等式で，$A(s)\zeta^{-1}(s) = B(s)$ が右の等式.

27. **演習**

(1) $A(x) = \sum_n a_n x^n$, $B(x) = \sum_n b_n x^n$, $C(x) = \sum_n c_n x^n$ とし，以下に答えよ．
- (1) $c_n = \sum_{j+2k \le n} a_j b_k$ のとき C を A と B で表せ.
- (2) $n b_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_k/(n-k)!$ のとき A を B で表せ.
- (3) r が実数で，$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} b_{n-k}$ のとき A を B で表せ.

(2) $a_0 = a_1 = 1$ の下で，漸化式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \ge 2)$ を解け.

(3) $a_0 = a_1 = 1$ の下で，漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ $(n \ge 2)$ を解け.

(4) 1 円玉，5 円玉，10 円玉，50 円玉，100 円玉，500 円玉を組み合わせて n 円にする組み合わせ方の個数 $\{a_n\}_{n \ge 0}$ (ただし $a_0 = 1$ とする) の母関数を求めよ．さらに a_{10000} を計算せよ.

(5) $2 \times n$ の長方形を 1×2 のドミノで詰める詰め方の個数 $\{a_n\}_{n \ge 0}$ (ただし $a_0 = 1$ とする) の母関数を求め，a_n を n の式で表せ.

(6) n 桁の自然数で，となり合う桁の数が異なりかつ 10 で割れるものの個数を求めよ.

(7) $B_0 = 1,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}\ (n \geq 2)$ で定義される数列 $B_0, B_1, \cdots$ の指数型母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, x^n = \frac{x}{e^x - 1}$$

(8) 3 角形の辺を渡り歩くランダムウォークを考える．始点となる頂点を指定し，後戻りはせず n 回目に始点に戻ってくるウォークの個数を求めよ．また 4 面体であればどうか？