1.2　写像と関係

1.2.1　写像とその性質

1. 集合 A から集合 B への**写像** f とは，A の任意の要素 a に対して B のある要素 b を対応させる規則のことであり，

$$f : A \to B$$

で表す．a に対応する要素 b は $f(a)$ で表す．
A を f の**定義域**，B を f の**値域**という．

2. **写像の例：**

(1) 関数，たとえば $f(x) = x^2$ など．

(2) 数式では表わせない対応，たとえば置換など．

3. A から B への二つの写像 $f : A \to B$, $g : A \to B$ が全く同じ対応を定めるとき，f と g は**等しい**といい

$$f = g$$

で表す．写像 f, g が等しいことを確かめるには，任意の $a \in A$ に対して $f(a) = g(a)$ が成り立つことを確かめればよい．

4. A, B を集合，$f : A \to B$ を写像，A', B' をそれぞれ A, B の部分集合とする，このとき

$$\begin{aligned} f(A') &= \{f(a) \in B\,;\, a \in A'\} \\ &= \{b \in B\,;\, \text{ある } a \in A' \text{ が存在して } f(a) = b \text{ をみたす}\} \end{aligned}$$

を f による A' の**像**，

$$f^{-1}(B') = \{a \in A\,;\, f(a) \in B'\}$$

を f による B' の**逆像**という．

5. X, A, A', B を $A' \subset A \subset X$ をみたす集合，$f : A \to B$ を写像とする．このとき写像

$$f|_{A'} : A' \to B$$

を任意の $a \in A'$ に対して $f|_{A'}(a) = f(a)$　により定義することができる．この写像を f の A' への**制限**という．また，写像

$$\tilde{f} : X \to B$$

が，任意の $a \in A$ に対して $\tilde{f}(a) = (a)$ であるとき，$\tilde{f}$ は f の**拡張**という．

6. 写像 $f : A \to B$ が，任意の $a \in A$ に対し，B のある定まった元 $b \in B$ を対応させるとき，f は b への**定値写像**という．

7. $f : A \to B$, $g : B \to C$ を写像とすると，写像 $g \circ f : A \to C$ が

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

により定義される．$g \circ f$ を f と g の**合成（写像）**という．

8. **演習：**
$f(x) = x^3$, $g(x) = \cos x$ に対して，$f \circ g$, $g \circ f$ を x の関数として具体的に表せ．

9. **命題 1.3（合成写像の結合法則）：** $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ に対して

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

がなりたつ．これにより合成に括弧は必要なくなる．

10. **【重要】** $f : A \to B$ を写像とする．

    (1) A の異なる要素 $a \neq a'$ に対して，常に $f(a) \neq f(a')$ であるとき，f は**単射（一対一）**であるという．

    (2) B の任意の要素 b に対して，$f(a) = b$ となる $a \in A$ が常に存在するとき，f は**全射（上への写像）**であるという．

    (3) 単射かつ全射である写像を**全単射**という．

11. 写像 $f : A \to B$ が全単射であるとき，任意の元 $b \in B$ に対して $b = f(a)$ となる $a \in A$ が一意的に存在する．$b \in B$ に対してこのように定まる $a \in A$ を対応させる写像を

$$f^{-1} : B \to A$$

で表し，f の**逆写像**とよぶ．

12. 定義域と地域が一致している写像は**変換**という．
任意の $a \in A$ を a にうつす変換は**恒等変換**といい，id_A で表す．
$f : A \to B$ が全単射であれば $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$．
$A' \subset A$ のとき $a \in A'$ を同じ元 $a \in A$ に対応させる写像 $A' \to A$ は**包含写像**という．

13. **命題 1.4：** $f : A \to B$ を写像，A_1, A_2 を A の部分集合，$B_1. B_2$ を B の部分集合とすると，

(1) $A_1 \subset A_2$ なら $f(A_1) \subset f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

(4) $B_1 \subset B_2$ なら $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

(5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

1.2.2　直積と写像のグラフ

1. 集合 A, B の**直積**とは,

$$A \times B = \{(a,b)\ ;\ a \in A,\, b \in B\}$$

で定義される A の元と B の元の**順序対** (a,b) の集合のこと.
$x = (a,b) \in A \times B$ に対して $a \in A$ または $b \in B$ を対応させる写像を**射影**という.
一般に，直積という概念は有限個の集合に対して自然に拡張される.

2. 写像 $f : A \to B$ の**グラフ**

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) \in A \times B\,;\, a \in A\}$$

$A = B = \mathbb{R}$ のときは通常のグラフ.

3. **演習：** A から B への写像全体のなす集合を

$$B^A = \{f\,;\, f : A \to B \text{ 写像}\}$$

で表す．$f \in B^A$ に対し，そのグラフ $\Gamma_f \in \mathcal{P}(A \times B)$ を対応させる写像は単射であることを示せ.

1.2.3　添え字付けられた集合族

1. Λ を集合とし，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対してある集合 A_λ が対応しているとき，それらの全体を

$$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

で表し，Λ によって**添え字付けられた集合族**という.

2. Λ によって添え字付けられた集合族は，Λ から A_λ 等の集合を要素とする集合族への写像としても定義できる．

3. **演習：** 教科書をよく読んで，添え字付けられた集合族と，集合族

$$\{A_\lambda\,;\,\lambda \in \Lambda\}$$

との違いを説明せよ．

4. 添え字付けられた集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の和集合

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{a\,;\,\text{ある}\lambda\in\Lambda\text{に対して}\,a\in A_\lambda\}$$

5. 添え字付けられた集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の共通部分

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{a\,;\,\text{すべての}\lambda\in\Lambda\text{に対して}\,a\in A_\lambda\}$$

6. **演習：** 1 から n までの自然数の集合を $Z_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ で表すとき，$\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の和集合と共通部分を求めよ．

7. 添え字付けられた集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{a : \Lambda \to \bigcup_{\lambda} A_\lambda\ \ \text{写像}\,;\,\text{すべての}\,\lambda\in\Lambda\,\text{に対して}\,a(\lambda)\in A_\lambda\}$$

各 A_λ を直積因子という．a の λ における値 a_λ を明示して

$$a = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

とも書く．

8. λ を一つ固定し，$a \in \prod_\lambda A_\lambda$ に a_λ を対応させる写像

$$p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} \to A_\lambda$$

を λ 成分への射影という．

9. **演習：** Λ が有限集合の場合, $\prod_\lambda A_\lambda$ は有限個の集合の直積と自然に対応することを示せ．

10. すべての λ に対して $A_\lambda = A$ のとき

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = A^\Lambda$$

11. **演習：**A を集合とするとき，$\mathcal{P}(A)$ と $\{0,1\}^A$ の間に自然な全単射を構成せよ．
コメント： これより $\mathcal{P}(A)$ は 2^A と書かれることが多い．

12. **命題：**$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を添え字付けられた集合族とするとき，任意の集合 B に対して (1) (2) が, さらに A_λ がすべてある集合 X の部分集合であるときは (3) (4) が成り立つ．
   (1) $B\cup(\bigcap_\lambda A_\lambda)=\bigcap_\lambda(B\cup A_\lambda)$
   (2) $B\cap(\bigcup_\lambda A_\lambda)=\bigcup_\lambda(B\cap A_\lambda)$
   (3) $(\bigcup_\lambda A_\lambda)^c=\bigcap_\lambda A_\lambda^c$
   (4) $(\bigcap_\lambda A_\lambda)^c=\bigcup_\lambda A_\lambda^c$

1.2.4 同値関係と商集合

1. 集合 A における関係とは，$A\times A$ の部分集合

$$R\subset A\times A$$

のこととする. 順序対 $(a,b)\in A\times B$ が R に含まれるとき，aRb で表し，a と b は関係 R が成立するという.

2. 【**重要**】関係 $R\subset A\times A$ で，以下の三条件をみたすものを**同値関係**という．ただしここでは aRb を $a\sim b$ で表す.
   (1) 任意の $a\in A$ に対して $a\sim a$ （反射律）
   (2) $a\sim b$ ならば $b\sim a$ （対称律）
   (3) $a\sim b$ かつ $b\sim c$ ならば $a\sim c$ （推移律）

3. 同値関係 $\sim$ は集合 A の元を分類する.

$$R(a)=\{b\,;\,b\sim a\}$$

とおくと
   (1) $a\in R(a)$
   (2) $a\sim b$ ならば $R(a)=R(b)$
   (3) $a\not\sim b$ ならば $R(a)\cap R(b)=\emptyset$

$R(a)$ を a の属する**同値類**，$R(a)$ の任意の元（たとえば a）をその同値類の**代表元**という．A は同値類の交わりのない和（直和という）

$$A = \coprod \text{同値類}$$

に分かれる．

4. **演習：** 写像 $f : A \to B$ に対し，

$$R = \{(a, b) \in A \times A;\ f(a) = f(b)\}$$

とおくと，R は同値関係であることを示せ．

5. **商集合**

$$A/\sim\, = \{R(a);\, a \in A\}$$

6. **標準的射影**

$$\pi : A \to A/\sim$$

7. **演習：** a を自然数とし，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ において

$$m \sim n\ (n, m \in \mathbb{Z}) \iff m - n \text{ が } a \text{ で割り切れる}$$

とおけば，$\sim$ は同値関係である．